

Kutno ubrzanje rotora iz stanja mirovanja povećava se proporcionalno vremenu ($\varepsilon = k \cdot t$) tako da njegova kutna brzina poslije 6 sekundi rotacije iznosi $36\pi \text{ s}^{-1}$. Odredite broj okretaja N rotora.

- intenzitet kutnog ubrzanja: $\varepsilon = k \cdot t$

- k je nepoznati koeficijent proporcionalnosti

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = k \cdot t$$

$$d\omega = k \cdot t \cdot dt$$

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t k \cdot t \cdot dt$$

$$\omega = \frac{1}{2} k \cdot t^2 + C_1 \quad \text{za } t = 0 \quad \omega = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\omega = \frac{1}{2} k \cdot t^2$$

- određivanje nepoznatog koeficijenta proporcionalnosti

$$\text{za } t = 6 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \omega = 36 \cdot \pi \text{ s}^{-1}$$

$$k = \frac{2 \cdot \omega}{t^2} = \frac{2 \cdot 36 \cdot \pi}{6^2} = 2 \cdot \pi$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot t^2 = \pi \cdot t^2$$

- određivanje kuta rotacije

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$d\varphi = \omega \cdot dt$$

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega \cdot dt = \int_0^t \pi \cdot t^2 \cdot dt$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \pi \cdot t^3 + C_2 \quad \text{za } t = 0 \quad \varphi = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

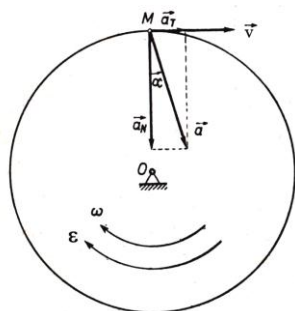
$$\varphi = \frac{1}{3} \pi \cdot t^3$$

- određivanje broja okretaja za $t = 6 \text{ s}$

$$\varphi = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^3 = 72 \cdot \pi$$

$$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} = \frac{72 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} \quad N = 36 \text{ okretaja}$$

Koristeći rješenja prethodnog zadatka uz iste uvjete, odredite brzinu i ubrzanje točke M na obodu rotora promjera $d = 20$ cm za $t = 3$ s.



- kutna brzina rotora za $t = 3$ s

$$\omega = \pi \cdot t^2 = \pi \cdot 3^2 = 9 \cdot \pi \text{ s}^{-1}$$

- obodna brzina točke M

$$v = r \cdot \omega = \frac{d}{2} \cdot \omega$$

$$v = \frac{0,2}{2} \cdot 9 \cdot \pi = 0,9 \cdot \pi \text{ m/s}$$

- tangencijalno ubrzanje točke M za $t = 3$ s

$$a_T = r \cdot \varepsilon = \frac{d}{2} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_T = \frac{0,2}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot t = 0,2 \cdot \pi \cdot 3 = 0,6 \cdot \pi \text{ m/s}^2$$

- normalno ubrzanje točke M

$$a_N = r \cdot \omega^2 = \frac{d}{2} \cdot \omega^2 \quad \text{ili} \quad a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{(r \cdot \omega)^2}{r} = r \cdot \omega^2 = \frac{d}{2} \cdot \omega^2$$

$$a_N = \frac{0,2}{2} \cdot (9 \cdot \pi)^2 = 8,1 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

- ukupno ubrzanje točke M

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

$$a = \sqrt{(0,6 \cdot \pi)^2 + (8,1 \cdot \pi^2)^2} = \sqrt{0,36 \cdot \pi^2 + 65,61 \cdot \pi^4} = \sqrt{\pi^2 \cdot (0,36 + 65,61 \cdot \pi^2)}$$

$$a = 79,88 \text{ m/s}^2$$

- prikloni kut ukupnog ubrzanja točke M u odnosu na radijus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_T}{a_N}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6 \cdot \pi}{8,1 \cdot \pi^2} = 0,0236$$

$$\alpha = 1,35^\circ$$

Rotor polumjera 20 cm iz stanja mirovanja postigne **radnu brzinu rotacije** od $n = 15\,000$ okr/min poslije 30 sekundi. Smatrajući kutno ubrzanje rotora konstantnom vrijednošću, odredite:

- a) broj okretaja rotora koji je izvršen tijekom tih 30 sekundi
b) brzinu i ubrzanje točke na obodu rotora pri daljnjoj **jednolikoj rotaciji**.

- a) - kutna brzina rotacije u zavisnosti od broja okretaja za $t = 30$ s

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60} \quad (\text{samo za jednoliku rotaciju})$$

- kutno ubrzanje rotacije rotora za $t = 30$ s

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega = \varepsilon \cdot t$$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{15000}{60}}{t} = \frac{500 \cdot \pi}{30} = 52,33 \text{ s}^{-2}$$

- kut rotacije

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{500 \cdot \pi}{30} \cdot 30^2$$

$$\varphi = 7500 \cdot \pi \text{ rad}$$

- broj okretaja za $t = 30$ s

$$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \Rightarrow N = \frac{7500 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 3750 \text{ okretaja}$$

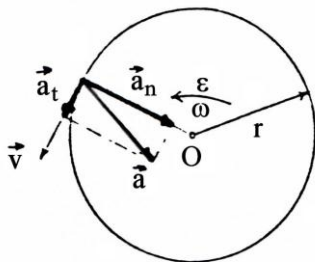
- b) - kod jednolike rotacije: $a_t = 0$ $v = \text{const.}$

$$v = r \cdot \omega = 0,2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{15000}{60} = 100 \cdot \pi \text{ m/s}$$

$$a = a_n = r \cdot \omega^2 = 0,2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{15000}{60} \right)^2 = 50000 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2 \quad \text{ili}$$

$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(100 \cdot \pi)^2}{0,2} = \frac{10000 \cdot \pi}{0,2} = 50000 \cdot \pi^2 \text{ m/s}^2$$

Kotač polumjera 20 cm iz stanja mirovanja počne se okretati kutnim ubrzanjem od 2 s^{-2} . Kolike su vrijednosti brzine i ubrzanja točke A na obodu kotača nakon 5 sekundi.



- jednoliko ubrzana rotacija

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega = \varepsilon \cdot t$$

$$\omega = 2 \cdot 5 = 10 \text{ s}^{-1}$$

- obodna brzina točke A

$$v = r \cdot \omega = 0,20 \cdot 10 = 2 \text{ m/s}$$

- tangencijalna komponenta ubrzanja točke A

$$a_t = r \cdot \varepsilon = 0,20 \cdot 2 = 0,4 \text{ m/s}^2$$

- normalna komponenta ubrzanja točke A

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2^2}{0,20} = 20 \text{ m/s}^2$$

- ukupno ubrzanje točke A

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a = \sqrt{0,4^2 + 20^2}$$

$$a = 20,004 \text{ m/s}^2$$

ili

$$a = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$a = 0,2 \cdot \sqrt{2^2 + 10^4}$$

$$a = 20,004 \text{ m/s}^2$$

Osovina koja je rotirala sa 90 okr/min zaustavlja se jednoliko usporeno za 40 s. Koliko okretaja napravi osovina tijekom zaustavljanja.

- početna kutna brzina rotacije osovine

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60}$$

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{90}{60}$$

$$\omega_0 = 3 \cdot \pi \text{ s}^{-1}$$

- jednoliko usporena rotacija osovine

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon \cdot t$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\omega = 0 \text{ (zaustavljanje)}$$

$$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$$

$$0 = \omega_0 - \varepsilon \cdot t$$

$$0 = 3 \cdot \pi - \varepsilon \cdot 40$$

$$\varepsilon = \frac{3 \cdot \pi}{40} = 0,236 \text{ s}^{-2}$$

$$\varphi = 3 \cdot \pi \cdot 40 - \frac{1}{2} 0,236 \cdot 40^2$$

$$\varphi = 188 \text{ rad}$$

- broj okretaja do zaustavljanja osovine

$$N = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi}$$

$$N = \frac{188}{2 \cdot \pi}$$

$$N \approx 30 \text{ okretaja}$$

Za koje je vrijeme osovina iz stanja mirovanja postigla radnu brzinu rotacije od $n = 120$ okr/min ako je od polaska rotirala jednoliko ubrzano i u tom vremenu napravilo $N = 600$ okretaja.

- kutna brzina izražena preko radne brzine rotacije (okr/min)

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{120}{60} = 4 \cdot \pi \text{ s}^{-1}$$

- kut rotacije izražen preko ukupnog broja okretaja (N)

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot N = 2 \cdot \pi \cdot 600 = 1200 \cdot \pi \text{ rad}$$

- jednoliko ubrzana rotacija

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega_0 = 0$$

$$\omega = \varepsilon \cdot t$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (\varepsilon \cdot t) \cdot t$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \omega \cdot t$$

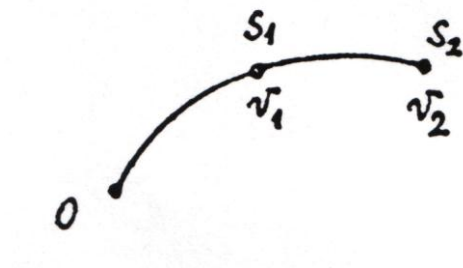
$$\frac{1}{2} \omega \cdot t = 2 \cdot \pi \cdot N$$

$$t = \frac{4 \cdot \pi \cdot N}{\omega} = \frac{4 \cdot \pi \cdot N}{4 \cdot \pi}$$

$$t = N$$

$$t = 600 \text{ s}$$

Auto iz stanja mirovanja počinje se jednoliko ubrzano gibati po kružnici i nakon 600 m postigne brzinu od 36 km/h. Odredite brzinu i ubrzanje na sredini puta (nakon prvih 300 m) ako je polumjer zakrivljenosti zavoja 800 m.



$$s_1 = \frac{s_2}{2} = 300 \text{ m}$$

$$s_2 = 600 \text{ m}$$

$$v_2 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$$

$$r = 800 \text{ m}$$

- jednoliko ubrzano gibanje po kružnici ($a_t = \text{const.}$)

$$s_2 = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$$

$$v_2 = v_0 + a_t \cdot t$$

$$s_0 = 0$$

$$v_0 = 0$$

$$v_0 = 0$$

$$v_2 = a_t \cdot t$$

$$s_2 = \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$$

$$t = \frac{v_2}{a_t}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} a_t \cdot \left(\frac{v_2}{a_t} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{a_t}$$

$$v_2^2 = 2 a_t \cdot s_2$$

$$\text{- analogno: } v_1^2 = 2 a_t \cdot s_1$$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2}$$

$$v_1^2 = \frac{v_2^2}{2}$$

$$v_1 = v_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_1 = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7,07 \text{ m/s} \quad (\text{brzina na sredini puta})$$

- tangencijalno ubrzanje

$$a_t = \frac{v_2^2}{2 \cdot s_2} = \frac{10^2}{2 \cdot 600} = 0,0833 \text{ m/s}^2 \quad \text{ili} \quad a_t = \frac{v_1^2}{2 \cdot s_1} = \frac{7,07^2}{2 \cdot 300} = 0,0833 \text{ m/s}^2$$

-normalno ubrzanje

$$a_n = \frac{v_1^2}{r} = \frac{7,07^2}{800} = 0,0625 \text{ m/s}^2$$

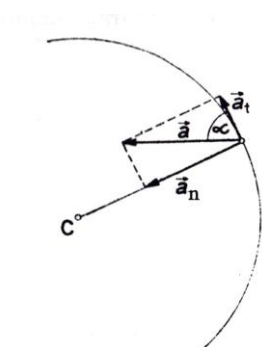
- ukupno ubrzanje na sredini puta

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0,0833^2 + 0,0625^2} = 0,104 \text{ m/s}^2$$

Automobil se giba po kružnici polumjera $r = 500 \text{ m}$ konstantnom tangencijalnim ubrzanjem $a_t = 0,5 \text{ m/s}^2$. Odredite za trenutak kada je brzina automobila iznosila 72 km/h :

- normalno (radijalno, centripetalno) ubrzanje
- ukupno ubrzanje
- smjer ubrzanja
- vrijeme potrebno za ubrzanje od početne brzine $v_0 = 54 \text{ km/h}$ do konačne brzine $v_k = 72 \text{ km/h}$.

$$v_0 = \frac{54000}{3600} = 15 \text{ m/s} \quad v_k = \frac{72000}{3600} = 20 \text{ m/s}$$



$$\text{a) } a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{500} = \frac{400}{500} = 0,8 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,8^2} = 0,94 \text{ m/s}^2$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{0,8}{0,5} = 1,6 \Rightarrow \alpha = 58^\circ$$

$$\text{d) } v_k = v_0 + a_t \cdot t$$

$$t = \frac{v_k - v_0}{a_t} = \frac{20 - 15}{0,5} = 10 \text{ s}$$

Materijalna točka giba se po kružnici polumjera $r = 30 \text{ cm}$ bez početne brzine stalnim tangencijalnim ubrzanjem $a_t = 0,06 \text{ m/s}^2$. Odredite:

- zavisnost normalnog ubrzanja o vremenu $a_n = f(t)$
- u kojem trenutku od početka gibanja će normalno ubrzanje biti dvostruko veće od tangencijalnog.

$$\text{a) } v = v_0 + a_t \cdot t \quad v_0 = 0 \Rightarrow v = a_t \cdot t$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(a_t \cdot t)^2}{r} = \frac{a_t^2}{r} \cdot t^2 \Rightarrow a_n = \frac{0,06^2}{0,30} \cdot t^2 = 0,012 \cdot t^2$$

$$\text{b) } a_n = 2 \cdot a_t$$

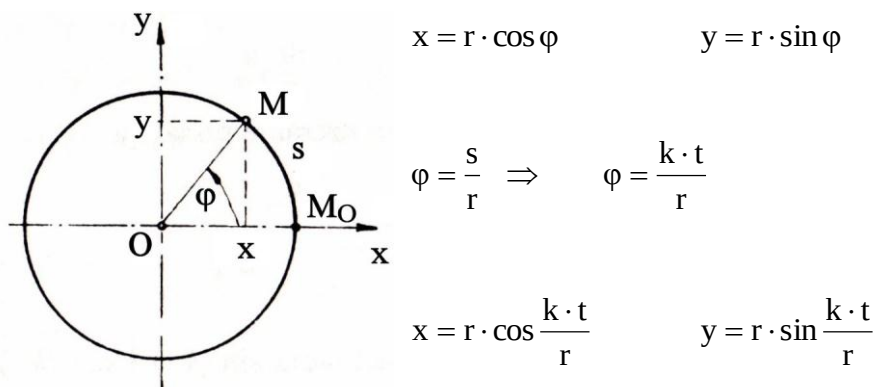
$$0,012 \cdot t^2 = 2 \cdot 0,06$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,06}{0,012}} = \sqrt{\frac{0,12}{0,012}} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ s}$$

Materijalna točka giba se po kružnici polumjera r suprotno gibanju kazaljke na satu. Zakon gibanja dan je jednačom:

$$s = k \cdot t \quad s \text{ (m)}, \quad t \text{ (s)}$$

Odredite jednačbe gibanja materijalne točke M u odnosu na koordinatni sustav Oxy .



Automobil krene iz stanja mirovanja i giba se po kružnici polumjera 200m s konstantnim ubrzanjem od 3 m/s^2 . Odredite:

- duljinu puta koji automobil mora prijeći po kružnici da bi mu ukupno ubrzanje iznosilo 5 m/s^2
- potrebno vrijeme t .

$$a) \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = r \cdot a_n = 200 \cdot 4 = 800 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = \sqrt{800} = \sqrt{400 \cdot 2} = 20 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$

- jednoliko ubrzano gibanje

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \quad v = v_0 + a_t \cdot t$$

$$s_0 = 0 \quad v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{a_t}$$

$$s = \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{2} a_t \cdot \left(\frac{v}{a_t} \right)^2$$

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot a_t} = \frac{(\sqrt{800})^2}{2 \cdot 3} = \frac{800}{6} = 133,33 \text{ m}$$

$$b) \quad t = \frac{v}{a_t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{800}}{3} = 9,43 \text{ s}$$

Automobil se giba po kružnici polumjera 400 m jednoliko usporeno pri čemu na putu od 750 m dolazi do smanjivanja brzine sa 72 km/h na 18 km/h. Odredite:

a) ukupna usporenja automobila na početku i na kraju smanjivanja brzine

b) trajanje usporenja.

$$v_0 = \frac{72000}{3600} = 20 \text{ m/s} \quad v_k = \frac{18000}{3600} = 5 \text{ m/s}$$

$$\text{a) } s = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \quad v = v_0 - a_t \cdot t$$

$$s_0 = 0$$

$$t = \frac{v_0 - v}{a_t}$$

$$s = v_0 \cdot \left(\frac{v_0 - v}{a_t} \right) - \frac{1}{2} a_t \cdot \left(\frac{v_0 - v}{a_t} \right)^2$$

- sređivanjem gornjeg izraza dobiva se:

$$2 \cdot a_t \cdot s = v_0^2 - v^2$$

$$a_t = \frac{v_0^2 - v^2}{2 \cdot s} = \frac{20^2 - 5^2}{2 \cdot 750} = \frac{400 - 25}{1500} = 0,25 \text{ m/s}^2$$

- normalna komponenta usporenja na početku smanjivanja brzine

$$a_{n0} = \frac{v_0^2}{r} = \frac{20^2}{400} = 1 \text{ m/s}^2$$

- normalna komponenta usporenja na kraju smanjivanja brzine

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{5^2}{400} = 0,0625 \text{ m/s}^2$$

- ukupno usporenje na početku smanjivanja brzine

$$a_0 = \sqrt{a_t^2 + a_{n0}^2} = \sqrt{0,25^2 + 1^2} = 1,031 \text{ m/s}^2$$

- ukupno usporenje na kraju smanjivanja brzine

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0,25^2 + 0,0625^2} = 0,257 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } t = \frac{v_0 - v}{a_t} \Rightarrow t = \frac{20 - 5}{0,25} = 60 \text{ s}$$